

## 1.1 Introduzione

Studieremo i sistemi di comunicazione a distanza:



Struttura generica di un sistema di comunicazione

Abbiamo il segnale da trasmettere  $m(t)$  (che contiene l'informazione) in ingresso al trasmettitore e il segnale ricevuto  $\hat{m}(t)$  in uscita dal ricevitore: in generale la loro forma d'onda può essere diversa per la presenza di disturbi durante la trasmissione; il segnale modulante  $m(t)$  può essere di natura analogica o digitale, a seconda del tipo di trasmissione. Il blocco  $\star$  in trasmissione serve ad elaborare il segnale opportunamente (può essere un filtro per il caso analogico o un convertitore A/D nel caso digitale) prima di trasmetterlo, mentre in ricezione serve a "ripulire" il segnale da componenti indesiderate e/o a riportarlo in forma analogica. Si dice, come vedremo, che a monte del blocco *mod.* (modulatore) e a valle del blocco *demod.* (demodulatore) i segnali siano in banda base, perché contengono componenti attorno a  $f=0$ . I segnali  $s(t)$  e  $r(t)$  occupano, invece, una certa banda attorno una frequenza portante ( $f_c$ , carrier frequency). Vedremo nel dettaglio il processo per portare un segnale da banda base in banda passante, quale la modulazione (viceversa per la demodulazione).

I mezzi trasmissivi possono essere suddivisi in due grosse categorie: wired (via cavo: linee telefoniche su doppino, cavo coassiale) e wireless (senza fili: aria, mare, vuoto). In ogni caso risentono dei disturbi indesiderati: interferenze elettromagnetiche (fulmini, trasmissione energia elettrica), fading, ecc... in generale detti disturbi di canale; a questi si aggiunge il rumore  $n(t)$ , introdotto dalla non idealità dei componenti impiegati nel costruire gli apparecchi.

Teoricamente si potrebbero adottare tutte le possibili tecniche di modulazione per tutte le frequenze portanti, ma esiste l'organo ITU (International Telecommunications Union) con sede a Ginevra, che regola l'utilizzo delle frequenze.

Iniziamo dallo studio dei segnali, in termini di spettro di frequenza e altre proprietà (valore medio, ecc...), quindi vedremo quali sono gli strumenti matematici che ci permettono di analizzare il contenuto dei segnali trasmessi.

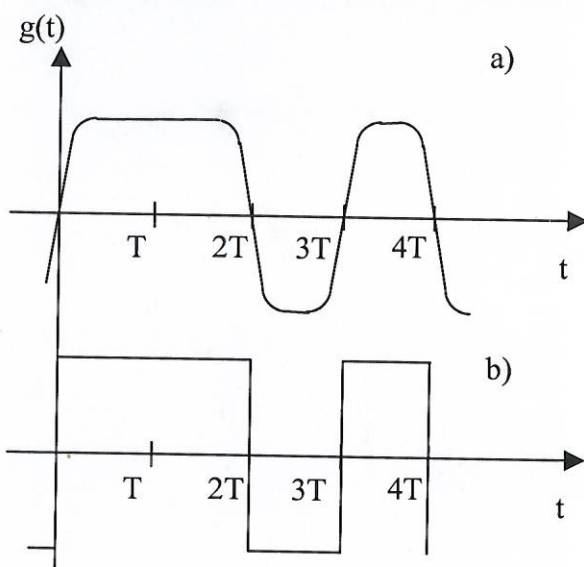
## 1.2 Forme d'onda fisicamente realizzabili

In particolare descriveremo matematicamente segnale e rumore nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza, secondo delle forme d'onda deterministiche. In genere quello che c'interessa è una forma d'onda di tensione o corrente nel dominio del tempo:  $v(t)$  o  $i(t)$ , che indichiamo genericamente <sup>con</sup>  $g(t)$ .

Una forma d'onda (f. d'o. per brevità) per essere *fisicamente realizzabile* (osservabile e misurabile in laboratorio) deve soddisfare le seguenti condizioni:

- 1) La f. d'o. assume *valori diversi da 0* su un intervallo finito da tempo: intuitivamente, i segnali fisici esistono per un periodo di tempo finito e producono un ammontare finito di energia;
- 2) Lo spettro della f. d'o. assume *valori diversi da 0* su un intervallo finito di frequenze: ogni mezzo trasmissivo ha una larghezza di banda limitata;
- 3) La f. d'o. è una funzione continua del tempo: è una conseguenza diretta della 2) (sarà meglio compresa più avanti);
- 4) La f. d'o. ha un valore di picco finito: serve ad evitare valori infiniti di corrente o tensione, che potrebbero distruggere i dispositivi fisici;
- 5) La f. d'o. assume solo valori reali: in natura esistono solo forme d'onda reali anche se alcune proprietà (come lo spettro) possono assumere valori complessi.

Spesso si usano modelli matematici che violano una o più delle condizioni precedenti, ma vedremo che sono molto utili per semplificare l'analisi della reale grandezza fisica. Ad esempio:



se la f. d'o. è quella del caso a), si studierà, per semplicità, quella del caso b) (facilmente descrivibile da un modello matematico), che viola la prima condizione, in quanto si estende per un intervallo infinito di tempo, e la terza, non essendo una funzione continua. Come vedremo, l'approssimazione introdotta porta a buoni risultati, eccetto che per alte frequenze.

Il modello matematico è detto essere un *segnale di potenza*, poiché ha una potenza finita (e una energia infinita), mentre la reale è un segnale di energia, poiché ha energia finita. Tutti i segnali fisici sono segnali di energia, sebbene vengano usati modelli matematici di segnali di potenza



per semplificarne l'analisi. Riassumendo, si può dire che le forme d'onda sono dunque classificate in base ai seguenti criteri:

- Segnale/Rumore;
- Digitale/Analogica;
- Deterministica/Non deterministica;
- Fisicamente realizzabile/Non fisicamente realizzabile;
- Di energia/Di potenza.

### 1.3 Grandezze caratteristiche delle forme d'onda

L'operatore di **media temporale** è definito come:

$$\langle [\cdot] \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\cdot] dt$$

ed è un operatore lineare:  $\langle a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \rangle = a_1 \langle g_1(t) \rangle + a_2 \langle g_2(t) \rangle$ , valido per qualsiasi forma d'onda. In particolare, per le f. d'o. periodiche (ovvero quelle per cui  $g(t) = g(t+T_0) \forall t$ , dove  $T_0$  è il più piccolo intero positivo che soddisfa la relazione), l'operatore di media temporale diventa:

$$\langle [\cdot] \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2 + a}^{T_0/2 + a} [\cdot] dt,$$

dove  $T_0$  è il periodo della f. d'o. e  $a$  una costante reale arbitraria che può essere posta anche uguale 0.

Il **valore DC** di una f. d'o. (Direct Current – corrente diretta) è dato dalla sua media temporale:

× MODELLO MATEMATICO

$$G_{DC} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt$$

× FORMA D'ONDA FISICA

$$G_{DC} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} g(t) dt.$$

Per f. d'o. fisiche siamo interessati a calcolare la corrente diretta su un intervallo temporale finito, mentre per il modello matematico dobbiamo usare la definizione precedente, risolvendo il limite per  $t \rightarrow \infty$ .

Vediamo ora il concetto di potenza di una forma d'onda.

Nei sistemi di comunicazione, se la **potenza** (media) del segnale ricevuto è sufficientemente più grande della potenza del rumore, l'informazione può essere recuperata (concetto base della teoria di Shannon sulla capacità di un canale).

Se  $v(t)$  è la tensione applicata ai capi di un circuito e  $i(t)$  la corrente che vi circola all'interno, allora la potenza istantanea da associare al circuito è data da:  $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ , mentre la potenza media  $P = \langle p(t) \rangle = \langle v(t) \cdot i(t) \rangle$ , ovvero applichiamo l'operatore di media temporale.

ESEMPIO:

Se  $v(t) = V \cos(\omega_0 t)$  e  $i(t) = I \cos(\omega_0 t)$ , calcolare la potenza istantanea e quella media.

Innanzitutto notiamo che  $V_{DC} = \langle v(t) \rangle = 0$ , mentre  $p(t) = v(t)i(t) = (1/2)VI \cos(1 + \cos 2\omega_0 t)$ ; per calcolare la potenza media abbiamo:  $P = \langle p(t) \rangle = \langle (1/2)VI(1 + \cos 2\omega_0 t) \rangle$  cioè:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$P = \left\langle \frac{1}{2} VI (1 + \cos 2\omega_0 t) \right\rangle = \frac{VI}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (1 + \cos 2\omega_0 t) dt = \underbrace{\frac{VI}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt}_{=1} + \frac{VI}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos 2\omega_0 t dt = \frac{VI}{2}$$

Il **valore rms** (o valore quadratico medio o valore efficace) di  $g(t)$  è dato da:

$$G_{rms} = \sqrt{\langle g^2(t) \rangle}$$

Se il carico è resistivo, la potenza media è data  $P = \langle v^2(t) \rangle / R = \langle i^2(t) \rangle R = V_{rms}^2 / R = I_{rms}^2 R = V_{rms} I_{rms}$ .

Spesso, nelle telecomunicazioni, si parla di **potenza normalizzata**, poiché si prende come riferimento  $R=1\Omega$ , ottenendo:

$$P = \langle g^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt,$$

la cui radice quadrata è proprio il valore RMS, cioè  $P_n = G_{RMS}^2$ .

La f. d'o.  $g(t)$  è **rappresentabile in potenza** se e solo se la sua potenza media normalizzata  $P$  è un valore finito e diverso da 0 ( $0 < P < +\infty$ ), mentre è **rappresentabile in energia** se e solo se la sua energia normalizzata  $E$ :



$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt$$

assume valore finito e diverso da 0 ( $0 < E < +\infty$ ).

Dalle definizioni date si vede che una f. d'o. può appartenere solo ad uno dei due tipi: se la potenza media è finita allora l'energia è infinita e viceversa. Alcune funzioni matematiche, come  $e^t$ , non appartengono a nessuno dei due tipi (hanno sia potenza che energia infinita). Come accennato, le forme d'onda fisicamente realizzabili sono rappresentabili in energia, ma spesso si modellano come segnali a durata infinita e potenza finita (poiché le misurazioni in laboratorio per i valori efficaci, medi, ecc.. vengono effettuate in un tempo finito, per cui T assume valori finiti).

Il **decibel** (dB) è il logaritmo in base 10 del rapporto di due grandezze, spesso si tratta di potenze. Il guadagno in dB di un circuito è dato da  $dB = 10 \log_{10}(P_{out}/P_{in})$ . Se il carico è resistivo si ha:  $dB = 20 \log_{10}(V_{out}/V_{in}) + 10 \log_{10}(R_{in}/R_{carico})$  e se lavoriamo con potenze normalizzate si ha:  $dB = 20 \log_{10}(V_{outrms}/V_{inrms}) = 20 \log_{10}(I_{outrms}/I_{inrms})$ . Conoscendo il valore in dB si può facilmente risalire al valore del rapporto di potenze:  $(P_{out}/P_{in}) = 10^{(dB/10)}$ . In seguito utilizzeremo il dB per misurare il rapporto delle potenze di segnale e rumore:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{segnale}}{P_{rumore}} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{\langle s^2(t) \rangle}{\langle m^2(t) \rangle} \right) \Rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{V_{rms\ s}}{V_{rms\ m}} \right)$$

I segnali sinusoidali, spesso usati nei problemi di telecomunicazioni, sono rappresentabili tramite notazione fasoriale (**fasori**). Un numero complesso C è detto fasore ed è usato per rappresentare una f. d'o. sinusoidale se:  $g(t) = |C| \cos(\omega_0 t + \angle C) = \text{Re}\{C e^{j\omega_0 t}\}$ , dove il fasore C può essere espresso anche in forma cartesiana  $C = x + jy$ .

ESEMPIO:

$g(t) = 25 \sin(\omega_0 t + 45^\circ) \Rightarrow g(t) = 25 \cos(\omega_0 t - 45^\circ) = \text{Re}\{(25 e^{-j(\pi/4)}) e^{j\omega_0 t}\}$  da cui si evince che il fasore di  $g(t)$  è  $C = 25 \angle -45^\circ$ .

#### 1.4 Trasformata di Fourier

Il valore di tensione (o di corrente) all'interno di un circuito varia in funzione del tempo, di conseguenza risulta d'interesse lo studio delle frequenze presenti nel circuito. Teoricamente, per valutare le frequenze presenti, bisogna analizzare la f. d'o. su tutti i tempi ( $-\infty < t < +\infty$ ) in modo da non dimenticare alcuna componente frequenziale. Il livello relativo di ogni componente rispetto alle altre è dato dallo spettro delle tensioni (o delle correnti). Esso può essere ottenuto utilizzando la **trasformata di Fourier** della f. d'o.:

DATA la f. d'o. $g(t)$ :	$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$	Il simbolo $\mathcal{F}$ è usato x indicare l'operazione di trasformazione e nell'integrale si introduce $f$ come variabile della transf.
--------------------------	---	---

Il risultato di questa operazione è uno spettro bilatero (a due lati), poiché dalla formula si ottengono componenti frequenziali sia negative che positive: la trasformata è il risultato di un calcolo matematico e non è fisicamente presente in alcun punto del sistema. In generale, poiché  $e^{-j2\pi ft}$  è complesso, anche  $G(f)$  lo sarà, per cui potremo scrivere  $G(f) = X(f) + jY(f)$  in forma cartesiana o, in forma polare,  $G(f) = |G(f)| e^{j\theta(f)}$ , dove  $|G(f)| = \sqrt{X^2(f) + Y^2(f)}$  e  $\theta(f) = \arctan(Y(f)/X(f))$ . Ad esempio, diremo che la frequenza  $f = 10\text{Hz}$  è presente nella f. d'o.  $g(t)$  se  $|G(10)| \neq 0$ . La trasformata inversa (o anti-trasformata) è:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

$G(f)$  e  $g(t)$  costituiscono una coppia di trasformate di Fourier.

Una f. d'o.  $g(t)$  è trasformabile secondo Fourier se soddisfa entrambe le condizioni di Dirichlet:

- 1)  $g(t)$  è assolutamente integrabile, ovvero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$$

- 2)  $g(t)$  ha un numero finito di discontinuità con valori di limite destro e limite sinistro finiti, e un numero finito di massimi e minimi in un intervallo finito di tempo.

Queste sono entrambe condizioni sufficienti ma non necessarie; una condizione sufficiente più restrittiva per l'esistenza della trasformata di F. è:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$$



dove  $E$  è l'energia normalizzata; ricordiamo che questa è la condizione di energia finita che è soddisfatta per tutte le f. d'o. realizzabili fisicamente.

Il calcolo della TF secondo la definizione può essere difficile, ma vi sono alcune tecniche alternative che spesso aiutano nello scopo (integrazione diretta, tabella, teoremi e proprietà).

### PROPRIETA' DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

→ - linearità:  $a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \leftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$  ;

x - simmetria spettrale dei segnali reali : se  $g(t)$  è reale  $\rightarrow G(-f) = G^*(f)$ ;

DIM:

$$G(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2j\pi(-f)t} dt \quad e \quad G^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(t) e^{-2j\pi f t}]^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(t) e^{2j\pi f t} dt$$

x - Corollario:

$|G(-f)| = |G(f)|$  lo spettro dei moduli è pari

$\theta(-f) = -\theta(f)$  lo spettro delle fasi è dispari

ma  $g^*(t) = g^*(t)$   
poiché  $g(t)$  reale

→ cambiamento di scala:  $F[g(at)] = (1/|a|)G(f/a)$ ;

- dualità:  $G(t) \leftrightarrow g(-f)$  ;

→ traslazione temporale:  $g(t-T_d) \leftrightarrow G(f)e^{-j2\pi f T_d}$

→ traslazione frequenziale:  $g(t)e^{j2\pi f_c t} \leftrightarrow G(f-f_c)$

- area di  $g(t)$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = G(0)$

- area di  $G(f)$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = g(0)$

→ derivazione nel dominio del tempo:  $d^n g(t)/dt^n \rightarrow (2\pi j f)^n G(f)$  con  $G(0)=0$ ;

x - integrazione nel dominio del tempo:  $\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{2j\pi f} G(f) + \frac{1}{2} G(0) \delta(f)$

x - coniugazione:  $g^*(t) \rightarrow G^*(-f)$ ;

→ moltiplicazione:  $g_1(t) g_2(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda) G_2(f-\lambda) d\lambda = G_1(f) \otimes G_2(f)$

x - convoluzione:  $g_1(t) \otimes g_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda) g_2(t-\lambda) d\lambda \rightarrow G_1(f) G_2(f)$

-  $g(t)$  pari  $\rightarrow G(f)$  è reale;

-  $g(t)$  dispari  $\rightarrow G(f)$  è immaginaria.

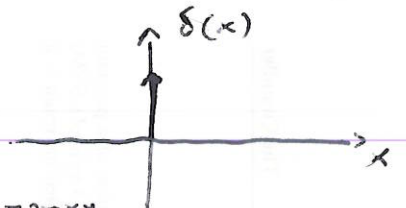
## TRASFORMATE DI FOURIER NOTEVOLI:

### X1) DELTA DI DIRAC $\delta(x)$ :

$$\delta(x) \triangleq \begin{cases} \infty & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{e vale } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\text{alternativamente } \delta(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j2\pi xy} dy$$



Sia  $w(x)$  una generica funzione continua in  $x=0$ , allora vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \delta(x) dx = w(0), \text{ da cui deriva la proprietà campionatrice della } \delta:$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \delta(x - x_0) dx = w(x_0),$$

utile quando si devono estrarre campioni da una data funzione, da queste proprietà è immediato il calcolo delle  $\mathcal{F}[\delta(t)]$ :

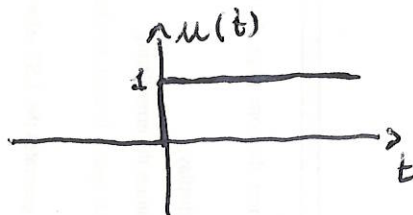
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(t)}_{w(t)} e^{-j2\pi ft} dt = e^0 = 1 = \Delta(f)$$

La verifica del risultato è operata grazie al calcolo della  $\mathcal{F}^{-1}$ :

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[\Delta(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df = \delta(t)$$

### X2) GRADINO UNITARIO

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$\text{Con } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda) d\lambda = u(t) \text{ e } \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

La trasformata di Fourier sarà:

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$

della proprietà di  
integrazione nel tempo



### x3) SINUSOIDE

$$o(t) = A \sin \omega_0 t, \text{ con } \omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}, \text{ per cui:}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

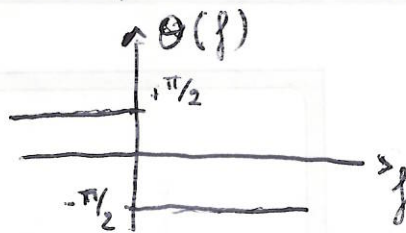
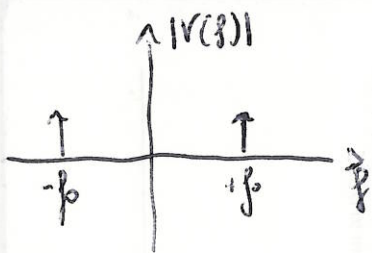
$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A \left( \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt +$$

$$-\frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f+f_0)t} dt \Rightarrow V(f) = j \frac{A}{2} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$$

utilizzando la trasformata delle  $\delta$  di Dirac e la proprietà di trasl. frequ.

Il seno è una funzione dispari, per cui otteniamo uno spettro prettamente immaginario. Osserviamo:

$$|V(f)| = \frac{A}{2} \delta(f-f_0) + \frac{A}{2} \delta(f+f_0) \quad \text{e} \quad \theta(f) = \begin{cases} -\pi/2 & f > 0 \\ +\pi/2 & f < 0 \end{cases}$$

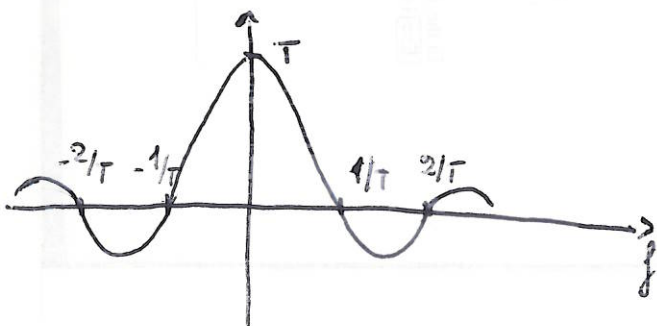
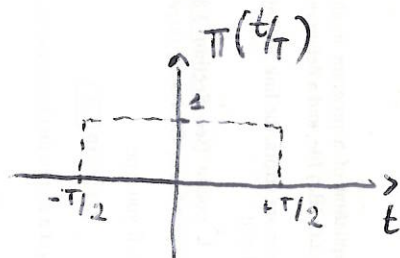


Si può notare come siano presenti solo due frequenze centrate in  $\pm f_0$ , il modulo è pari e la fase dispari perché il segnale è reale e lo spettro è a linee picchi  $\omega(t)$  è continua e periodica.

### 4) IMPULSO RETTANGOLARE

DIM

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega} = \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$$

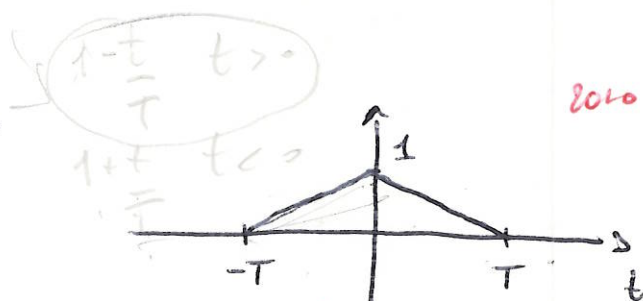
$$= \frac{2}{\omega} \sin(\omega T/2) = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = T \cdot \text{Sinc}(\omega T/2) = T \cdot \text{Sinc}(\pi f T)$$

con  $\text{Sinc}(x) \triangleq \text{Sa}(x) \triangleq \frac{\sin x}{x}$

Per la proprietà di dualità abbiamo:  $T \text{Sinc}(\pi f T) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi \left(-\frac{1}{f}\right) = \pi \left| \right|$

### 5) IMPULSO TRIANGOLARE

$$g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



Calcolando la derivata si ha:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \begin{cases} -1/T & 0 < t < T \\ 1/T & -T < t < 0 \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

$$= \frac{1}{T} [u(t+T)] - \frac{2}{T} u(t) + \frac{1}{T} [u(t-T)]$$

derivando ulteriormente:

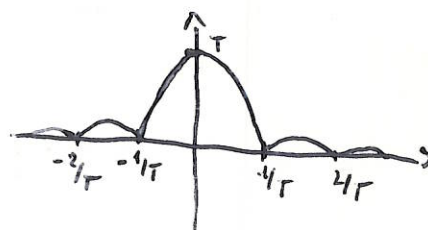
$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{1}{T} \delta(t+T) - \frac{2}{T} \delta(t) + \frac{1}{T} \delta(t-T)$$

la cui trasformata è:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2 g(t)}{dt^2}\right] = \frac{1}{T} e^{j\omega T} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T} e^{-j\omega T} = \frac{1}{T} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})^2$$

$= -\frac{4}{T} (\sin \pi f T)^2$  da cui, applicando due volte la proprietà di integrazione

$$g(t) \longleftrightarrow -\frac{4}{T} \frac{T (\sin \pi f T)^2}{(j2\pi f)^2} = T \text{Sinc}^2(\pi f T)$$





## 6) ALTRE TRASFORMATE D'INTERESSE

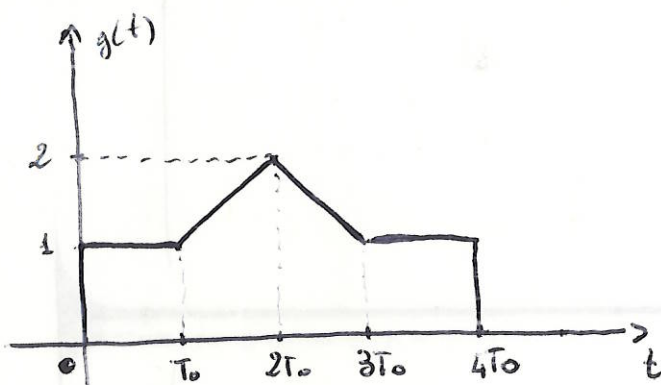
- funzione segno:  $\text{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{SGN}(f) = \frac{1}{j\pi f}$

- funzione costante:  $g(t) = 1 \quad -\infty < t < +\infty \Rightarrow G(f) = \delta(f)$

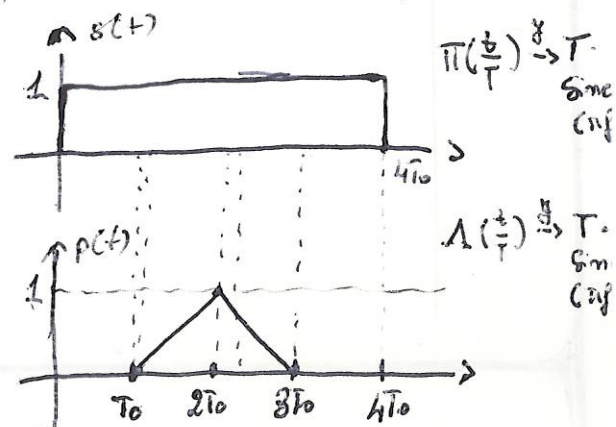
- fase:  $g(t) = e^{j(\omega_0 t + \varphi)} \Rightarrow G(f) = e^{j\varphi} \delta(f - f_0)$

### 7) ESERCIZIO: 2010

Dato il segnale  $g(t)$  come in figura, calcolarne lo spettro:



$\Rightarrow$



Possiamo immaginare  $g(t) = s(t) + p(t)$ :  $s(t)$  è un impulso rettangolare di ampiezza unitaria, di durata  $4T_0$  e traslato di  $2T_0$ , cioè  $s(t) = \Pi\left(\frac{t-2T_0}{4T_0}\right)$ , mentre  $p(t)$  rappresenta un impulso triangolare di ampiezza unitaria, di durata  $2T_0$  e traslato di  $2T_0$ , ovvero  $p(t) = \Lambda\left(\frac{t-2T_0}{T_0}\right)$ . La trasformata può essere facilmente calcolata ricorrendo alle proprietà di linearità e di traslazione temporale, per cui:

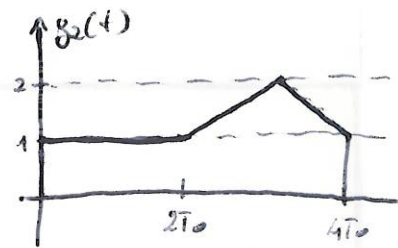
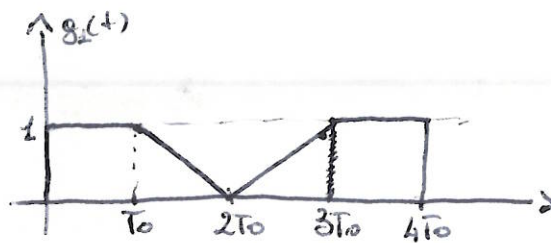
$$W(t - T_d) \xrightarrow{F} W(f) e^{-j\omega T_d}$$

$$S(f) = 4T_0 \text{sinc}(4\pi f T_0) e^{-j\omega 2T_0} \quad \text{e} \quad P(f) = T_0 \text{sinc}^2(\pi f T_0) e^{-j\omega 2T_0}$$

per cui:  $W(f) = \underbrace{[4T_0 \text{sinc}(4\pi f T_0) + T_0 \text{sinc}^2(\pi f T_0)]}_{\text{spettro delle ampiezze}} e^{-j\omega 2T_0}$

spettro delle ampiezze

8) ESERCIZIO X CASA :



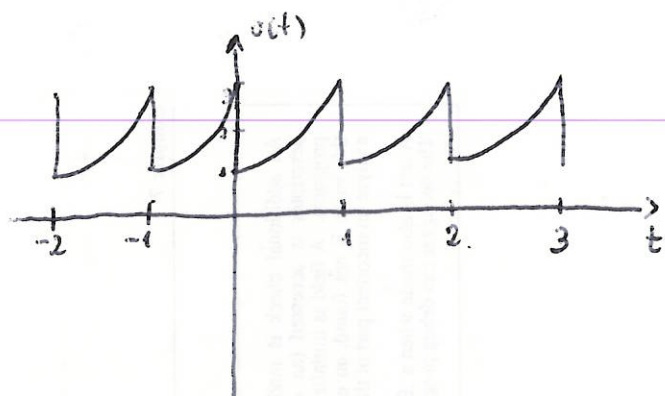
$$G_1(f) = e^{-j\omega 2T_0} [4T_0 \operatorname{sinc}(4\pi T_0 f) - T_0 \operatorname{sinc}^2(\pi T_0 f)]$$

2010

$$G_2(f) = 4T_0 \operatorname{sinc}(4\pi T_0 f) e^{-j\omega 2T_0} + T_0 \operatorname{sinc}^2(\pi f T_0) e^{-j\omega 3T_0}$$



- 9) Dato il segnale  $v(t)$  periodico come in figura, nell'intervallo  $0 < t < 2$  è descritto da  $e^t$ ; a) calcolare il valore medio e il valore efficace;



per segnali periodici si ha:

$$V_{dc} = \langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t) dt = \int_0^1 e^t dt = e^1 - e^0 = 2,718 - 1 = 1,716 \text{ V.}$$

$$V_{rms}^2 = \langle v^2(t) \rangle = \int_0^1 (e^t)^2 dt = \frac{1}{2} (e^2 - e^0) =$$

$$= (7,389 - 1)/2 = 3,194 \Rightarrow V_{rms} = \sqrt{3,194} = 1,79$$

- b) se il segnale si trova applicato ai capi di un carico resistivo di  $600 \Omega$ , calcolare la potenza media dissipata sul carico:

$$P = V_{rms}^2 / R = (1,79)^2 / 600 = 5,32 \times 10^{-3} \text{ W}$$

- 10) Calcolare la T.F. di:  $w(t) = \pi \left( \frac{t-5}{10} \right) + 8 \sin(6\pi t)$

ricordiamo che  $\pi \left( \frac{t}{T} \right) \xrightarrow{f} T \text{ Sinc}(\pi f T)$  e  $\sin \omega t \xrightarrow{f} \frac{A}{2} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$

per cui:

$$W(f) = 10 \text{ Sinc}(10\pi f) e^{-j2\pi f \cdot 5} + j4 [\delta(f+3) - \delta(f-3)]$$

- 11) Esercizio x casa: Calcolare  $W(f)$  se  $w(t) = 5 - 5e^{-2t} u(t)$   $[W(f) = 5\delta(f) - \frac{5}{2+jf}]$

procedere x integrazione:

$$\mathcal{F}[5] = 5\delta(f) + \int_{-\infty}^{+\infty} -5e^{-2t} u(t) e^{-j2\pi f t} dt = -5 \int_0^{+\infty} e^{-(2+j2\pi f)t} dt =$$

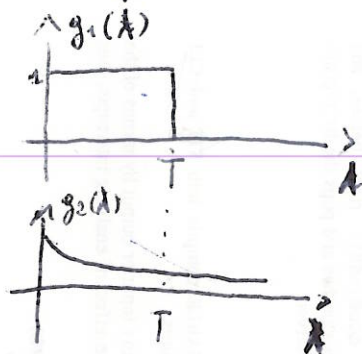
$$= -5 \cdot \frac{e^{-2(1+j\pi f)t}}{-2(1+j\pi f)} \Big|_0^{\infty} = -5 \cdot \frac{1}{-2(1+j\pi f)}$$

## ESEMPI SOLO CONVOLUZIONE

Supponiamo di voler calcolare l'espressione di  $g_3(t) = g_1(t) \otimes g_2(t)$ , in cui:

$$g_1(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right)$$

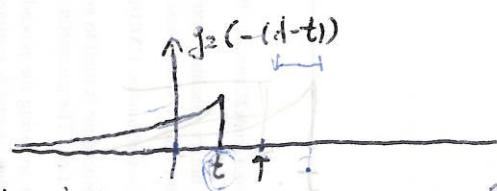
$$g_2(t) = e^{-t/T} u(t)$$



$$g_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\lambda) g_2(t-\lambda) d\lambda$$

Per ottenere l'integrando procediamo per via grafica seguendo i passi:

- 1) inversione sull'asse temporale di  $g_2 \rightarrow g_2(-\lambda)$ ;
- 2) spostamento di  $g_2$  di  $t$  unità  $\rightarrow g_2(-(t-\lambda))$ ;
- 3) moltiplicazione di  $g_2$  con  $g_1 \rightarrow g_1(\lambda) g_2(-(t-\lambda))$ ;



Per  $t < 0$  il prodotto è nullo  $\forall \lambda$

$$\text{Se } 0 < t < T \Rightarrow g_3(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\lambda)/T} d\lambda = T(1 - e^{-t/T}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{da } 0 \text{ a } t \\ \text{perché poi è} \\ \text{nullo } g_2 \end{array} \right.$$

$$\text{Se } t > T \Rightarrow g_3(t) = \int_0^T 1 \cdot e^{-(t-\lambda)/T} d\lambda = T(e-1)e^{-t/T} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{da } 0 \text{ a } T \\ \text{perché poi è} \\ \text{nullo } g_1 \end{array} \right.$$

Per cui:

$$g_3(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ T(1 - e^{-t/T}) & , 0 < t < T \\ T(e-1)e^{-t/T} & , t > T \end{cases}$$

